06/2017

Programme

LFA / DFG

Mathématiques

Séries SMP

1ère Tale

Travail validé par le ministère de la formation et de la culture du Land de la Sarre, le ministère de la culture de la jeunesse et du sport du Land du Bade-Wurtemberg et le ministère de l'Éducation nationale de la République française

LEHRPLAN DER KLASSEN 11 UND 12 SMP IN MATHEMATIK

PROGRAMME D'ENSEIGNEMENT DES CLASSES DE PREMIERE ET TEMINALE SMP EN MATHEMATIQUES

1. Préambule

1.1. Importance de la discipline

Le programme de Mathématiques doit entre autres

- aider l'élève à considérer les Mathématiques comme étant une matière nécessaire à la société, aussi bien par son utilisation au quotidien, que par son importance dans les raisonnements, les justifications, les expériences réalisées
- favoriser la créativité et l'imagination
- rendre l'élève capable de reconnaître des lier entre différentes notions mathématiques et de savoir les utiliser
- présenter à l'élève l'évolution culturelle, historique et philosophique des Mathématiques
- servir pour des travaux techniques ou pour des activités nécessitant de la réflexion
- faire apparaître les liens entre les Mathématiques et d'autres domaines scientifiques
- aider l'élève pour la poursuite de ses études

Il donne les bases nécessaires à l'élève qui s'orientera après le lycée vers des études ou un métier dans lesquels le raisonnement mathématique est nécessaire. En plus des Mathématiques, des matières Techniques et des Sciences Physiques ou Sciences Naturelles, cela concerne également de plus en plus aujourd'hui les métiers dans le domaine Économique et Social.

Il s'ensuit que l'on aura les buts suivants :

- le cours forme à la précision et à l'abstraction ; il permet des formulations exactes et des conclusions logiques
- il favorise la capacité à argumenter et à émettre des critiques
- il utilise différentes formes d'argumentations, depuis l'utilisation d'exemples jusqu'à la production de preuves formelles
- le cours entraîne à la capacité de traduire des situations réelles en langage mathématique, à résoudre les problèmes qui ont été modélisés, et à interpréter les résultats
- le cours favorise l'apprentissage par des activités de découverte. L'utilisation de démarches heuristiques lors d'expériences ou de tests permet à l'élève de découvrir et d'analyser des nouvelles notions
- le cours permet à l'élève de pratiquer une lecture active de l'information, en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique), et de communiquer un résultat par oral ou par écrit. La maîtrise du langage permet l'ouverture vers de nombreuses disciplines, notamment dans les domaines scientifiques, techniques et économiques
- le cours favorise la créativité et l'imagination : on présente aussi des activités ludiques, et on met l'accent sur l'esthétique des représentations
- le cours permet, par des exemples, de découvrir l'histoire des Mathématiques ainsi que l'importance de cette discipline dans l'évolution de notre société
- le cours guide l'élève tant dans le travail personnel que dans le travail en groupes. Il contribue à l'amélioration de l'autodiscipline, de la confiance en soi, de la concentration de l'élève, et lui donne le goût de l'effort
- le cours permet à l'élève de poursuivre des études scientifiques, ou d'envisager un métier dans le domaine des sciences

1.2. Compétences

L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :

- Modéliser et s'engager dans une activité de recherche

- Conduire un raisonnement, une démonstration
- Pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique
- Faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche
- Pratiquer une lecture active de l'information, en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique)
- Utiliser les outils logiciels (ordinateur, calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème
- Communiquer à l'écrit et à l'oral
- Utiliser les symboles mathématiques et le calcul formel
-

1.3. Remarques pour la didactique

Le programme est divisé en plusieurs parties.
Deux colonnes présentent d'une part les contenus, d'autre part les compétences attendues.
L'attribution des compétences attendues pour chaque contenu n'exclut pas la possibilité pour l'enseignant d'approfondir l'un ou l'autre point du programme.
Il semble cohérent d'utiliser une progression en spirale.
La forme de présentation des contenus ne constitue pas une progression. Chaque enseignant est libre de choisir sa progression.

1.4. Remarques pour l'épreuve du Baccalauréat et usage des outils numériques

Pour de nombreux aspects du quotidien comme dans presque tous les domaines de la vie professionnelle nécessitant une haute qualification, il est important de saisir et de savoir travailler avec des relations quantitatives et des concepts abstraits. Les méthodes heuristiques, stratégies de résolution de problèmes et procédures de réalisation qui interviennent dépassent largement les techniques de calcul élémentaire.
Dans ce contexte, la calculatrice graphique et les logiciels mathématiques sont des outils précieux.
L'usage des outils numériques nécessite la compréhension des procédés mathématiques mis en œuvre et permet une discussion critique sur les possibilités et limites de ces outils.
L'utilisation régulière des calculatrices graphiques programmables et de logiciels est de ce fait une composante de l'enseignement dans toutes les séries S.
La calculatrice graphique programmable est autorisée pour les examens. On veillera à amener les élèves à un usage précis et critique de ces outils numériques.

Organisation du programme
Le programme est divisé en sept grandes parties:
- Suites
- Analyse fonctionnelle
- Géométrie
- Nombres complexes
- Statistiques et probabilités
- Arithmétiques
- Matrices

Les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique d'une part et du raisonnement, des notations, de la logique, de l'emploi des quantificateurs d'autre part sont transversales et doivent être développées à l'intérieur de chaque partie. On veillera à une utilisation régulière de logiciels, d'un tableur, de la calculatrice (formelle ou non). Des activités utiles de type algorithmique sont signalées dans les différentes parties du programme.

Contenus Verbindlicher Inhalt	Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen

2. Contenus et compétences

2.1 Suites	
Généralités sur les suites • Définition d'une suite, notation indicielle • Modes de génération de suites : - suite définie par une fonction, - suite définie par une relation de récurrence, - suite définie par « description » • Représentation graphique d'une suite • Sens de variations d'une suite - Suites constantes, - Suites croissantes, - suites décroissantes - Suites majorées, - Suites minorées, - Suites bornées	Les élèves savent : • modéliser et étudier des situations concrètes à l'aide d'une suite. • représenter et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite. • établir les variations d'une suite
Principe de récurrence	Les élèves savent : • démontrer un résultat par récurrence • utiliser cette démarche dans des exemples choisis : somme des n premiers entiers naturels ; somme des carrés des n premiers entiers ; démonstrations de propriétés arithmétique du type « 4 divise $5^n - 1$ »
Suites arithmétiques • Définition • Représentation graphique (construction) • Relation de récurrence et expression de u_n en fonction de n • Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique • Limite d'une suite arithmétique	Les élèves savent : • donner la définition d'une suite arithmétique • construire la représentation graphique des termes d'une suite arithmétique • passer de la relation de récurrence à la forme explicite et réciproquement • calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique.
Suites géométriques • Définition • Représentation graphique (construction) • Relation de récurrence et expression de u_n en fonction de n • Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique • Limite d'une suite géométrique et critère de convergence	Les élèves savent : • donner la définition d'une suite géométrique • construire la représentation graphique des termes d'une suite géométrique • passer de la relation de récurrence à la forme explicite et réciproquement • calculer la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique • énoncer et utiliser le critère de convergence d'une suite géométrique $(-1 < q < 1)$
Comportement asymptotique de suites • Suites convergentes, suites divergentes • Unicité de la limite • Opérations algébriques sur les limites • Limite d'une suite définie par une fonction • Limites des suites de référence (suites de terme général n^p , $\frac{1}{n^p}$ avec $p \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n}$) • Limites et comparaison • Théorème des gendarmes • Convergence et divergence des suites arithmétiques et géométriques	Les élèves savent : • utiliser un tableur pour déterminer de façon empirique la limite d'une suite • démontrer qu'une suite converge vers ℓ en utilisant le critère : "(u_n) converge vers ℓ si et seulement si $(u_n - \ell)$ converge vers 0" • déterminer la limite d'une suite à l'aide des suites de référence et des opérations algébriques sur les limites • démontrer que « si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ » • prouver la divergence de la suite de terme général q^n pour $q > 1$ à l'aide de l'inégalité de Bernoulli • les théorèmes de convergence monotone (suites croissantes majorées ou décroissantes minorées) pour étudier le comportement

Contenus Verbindlicher Inhalt	**Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen**
	asymptotique d'une suite.

Contenus Verbindlicher Inhalt	Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen
2.2 ANALYSE : FONCTIONS	
Génération de nouvelles fonctions : • Composition de fonctions • Fonction réciproque • Symétrie des courbes représentatives	Les élèves savent : • composer deux fonctions et écrire une fonction comme composée de plusieurs fonctions • justifier la bijectivité d'une fonction et déterminer, le cas échéant, la fonction réciproque d'une fonction donnée • utiliser la symétrie d'une courbe représentative d'une fonction pour en déduire des propriétés de la fonction réciproque.
Limites • Limites de fonctions à l'infini • Limite de fonctions en un point • Théorème de comparaisons, théorème des gendarmes • Asymptotes - horizontale - verticale - oblique	Les élèves savent : • donner les limites des fonctions de référence et déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée de ces fonctions. • déterminer des limites par comparaison • déterminer les asymptotes à la courbe d'une fonction rationnelle • justifier qu'une droite donnée est asymptote à la courbe de la fonction à étudier.
Continuité d'une fonction • Définition de la continuité en un point • Continuité sur un intervalle • Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle : - Théorème des valeurs intermédiaires - Théorème de la bijection	Les élèves savent : • établir graphiquement la continuité d'une fonction en un point • préciser la continuité et la dérivabilité de certaines fonctions définies par morceaux • exploiter les théorèmes de continuité sur des intervalles pour la résolution de problèmes • à l'aide du tableau de variation, conclure quant à l'existence de racines sur un intervalle pour des fonctions continues dans un cas plus général.
De nouvelles règles de dérivation : • Produit • Quotient • Composition	Les élèves savent : • justifier la dérivabilité d'un produit, d'un quotient, etc … • utiliser les nouvelles règles de dérivation.
Indications : • La notion de bijection peut être utilisée pour l'étude des fonctions exponentielle et logarithme (voir partie 2.3) • La notion de courbe asymptote peut être introduite en exercice • L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en classe. • L'étude des limites peut être faite en lien avec le thème « fonctions rationnelles » (voir partie 2.3) • On se limite à une approche intuitive de la continuité ; l'étude théorique et l'utilisation de la notion de continuité ne sont pas attendues. • Les fonctions rationnelles à dériver auront un numérateur et un dénominateur de degré inférieur ou égal à 3.	
2.3 AUTRES FONCTIONS USUELLES	
Fonctions trigonométriques $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x + c) + d$ $f(x) = a \cdot cos(b \cdot x + c) + d$	Les élèves savent : • indiquer l´effet des constantes a, b, c, d sur les courbes représentatives dans l´écriture ci-contre • discuter de l'influence des paramètres par analogie avec les fonctions du second degré • modéliser un phénomène périodique à partir d'un tableau de mesures
Fonctions rationnelles • Domaine de définition • Dérivabilité et continuité • Symétrie (fonctions paire et impaire)	Les élèves savent : • mener l'étude détaillée des fonctions rationnelles.

Contenus Verbindlicher Inhalt	Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen
• Limites • Asymptotes • Racines • Sens de variation • Extrema • Points d'inflexion • Représentations graphiques	
Fonctions exponentielles ➢ **Fonction exponentielle de base *e*** • Dérivabilité de $f(x) = b^x$ • Définition du nombre d'Euler e • Définition de la fonction $f(x) = e^x$ • Relation fonctionnelle $f' = f$ • Propriétés de la fonction exponentielle de base e (sens de variation, convexité, limites, asymptotes, courbe représentative, tangentes) ➢ **Fonction exponentielle de base *b*** • Ensemble de définition • Ensemble des valeurs prises par $f(x)$ • Sens de variation • Limites • Représentation graphique • Tangentes	Les élèves savent: • donner les propriétés algébriques de la fonction exponentielle • reconnaître e comme la base de la fonction exponentielle vérifiant $f'(0) = 1$ • formuler les propriétés algébriques de la fonction exponentielle de base e ($e^{x+y} = e^x \times e^y$; $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$, $e^{xy} = (e^x)^y$) • déterminer la limite en 0 de $\frac{e^x-1}{x}$ • mener l'étude complète de la fonction exponentielle de base e
Utilisation des fonctions exponentielles • fonctions composées • quotients, produits et composées de la fonction exponentielle de base e et de fonctions polynômes • Comportement et limites de fonctions du type : $f(x) = x^n e^{cx}$ pour $x \to \pm\infty$ $n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}$)	Les élèves savent : • étudier les fonctions exponentielles ainsi que les fonctions définies à l'aide de fonctions polynômes et de la fonction exponentielle de base e • déterminer le comportement des fonctions du type $f(x) = \frac{e^x}{x^n}$ et $f(x) = e^x x^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ • établir le lien entre les fonctions exponentielles quelconques et la fonction exponentielle de base e à l'aide de la formule $b^x = e^{x\ln b}$
Croissance exponentielle • propriétés remarquables • égalité de quotients • comportement aux limites • modélisation de situations de croissance • équations différentielles linéaires de premier ordre à constant	Les élèves savent : • donner des exemples de croissances exponentielles et reconnaître les différences entre croissances exponentielles et linéaires • modéliser des situations de croissance et décroissance exponentielle et juger de la pertinence du modèle choisi • modéliser des situations concrètes à l'aide d'une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ qu'ils savent résoudre

Contenus Verbindlicher Inhalt	Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen
LOGARITHME NEPERIEN ET FONCTIONS LOGARITHMES ➢ **Notion de logarithme** • Définition • Propriétés • Propriétés algébriques de la fonction logarithme ➢ **Logarithme népérien** • Définition • Propriétés (dérivabilité et dérivée, primitive, variations, convexité, ensemble image, limites pour $x \to +\infty$ et $x \to 0^+$, représentation graphique) • Propriétés fonctionnelles • Fonction ln comme unique primitive de la fonction inverse s'annulant en 1 : $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ • Croissance de la fonction ln • Fonctions logarithmes de base b $(b > 0)$ ➢ **Fonctions composées** Produits, quotients et composées de la fonction ln avec des fonctions polynômes ➢ **Comportement de fonctions du type $\boldsymbol{x^n}$ln(x) pour $\boldsymbol{x \to +\infty}$ ou $\boldsymbol{x \to 0^+}$ et $\boldsymbol{n \in \mathbb{N}}$.** ➢ Fonctions primitives de $f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$ (intégration logarithmique)	Les élèves savent : • préciser la notion de logarithme et connaissent $log_b(x)$ comme solution de l'équation $b^y = x$ • énoncer et utiliser les propriétés de base et les propriétés algébriques ainsi que leurs conséquences • résoudre les équations et inéquations logarithmiques à l'aide des propriétés algébriques du logarithme • faire le lien entre le logarithme népérien et le logarithme de base b pour le calculer : $log_b(x) = \frac{log_c(x)}{log_c(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$ • formuler la définition de la fonction logarithme népérien ainsi que ses caractéristiques usuelles : $\ln(x_1x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ $\ln(x^r) = rln\ (x)$ • utiliser à bon escient la relation $b^x = e^{xln\ b}$ • utiliser l'équivalence $\ln a = b \iff a = e^b$ (pour $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}$) • que la fonction ln est l'unique primitive de la fonction inverse s'annulant en 1 : $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ • déterminer une approximation linéaire de la fonction $\ln(x + 1)$ en $x = 0$. • résoudre à l'aide des propriétés algébriques des équations et inéquations comportant des logarithmes. • démontrer que : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ en faisant le lien entre dérivée et limite du taux d'accroissement • utiliser les limites • exprimer $\log_a x$ à l'aide de $\ln x$ • déduire des propriétés de la fonction logarithme népérien celles des fonctions logarithme de base a. • étudier des fonctions composées de la fonction logarithme népérien et de fonctions polynômes • déterminer le comportement des fonctions du type $f(x) = x^n$ln(x) pour $x \to +\infty$ ou $x \to 0^+$ et $n \in \mathbb{N}$

Indications :

- De façon générale, on se limitera au degré 2 pour le dénominateur des fonctions rationnelles
- On déterminera les points d'inflexion uniquement par l'étude du signe de la dérivée seconde
- L'étude des familles de fonctions ne pourra pas être le thème central d'un exercice
- La détermination d'asymptotes obliques pourra être effectuée à l'aide de la division de polynômes
- La notion de courbe asymptote pourra être introduite
- On pourra utiliser la méthode de variation de la constante pour résoudre des équations différentielles : « les solutions d'une équation différentielle non homogène s'écrivent comme la somme de la solution de l'équation différentielle homogène associée et d'une solution particulière »

Contenus Verbindlicher Inhalt	Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen
• La fonction ln peut être introduite comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle de base e ou comme étant la fonction telle que : $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ (à supposer que le calcul intégral ait déjà été abordé) • On définira le logarithme de base b de manière générale mais on se restreindra aux cas $b > 1$ pour l'étude de ces fonctions	
2. 4 CALCUL INTÉGRAL	
➢ **Calcul intégral et primitives** • Introduction des intégrales • Propriétés de l'intégrale (relation de Chasles, linéarité) • Règles d'intégrations (linéarité) • L'intégrale définie sur un intervalle borné • Primitives • Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral • Conservation de l'ordre • Théorème de la moyenne • Valeur moyenne d'une fonction • Applications du calcul intégral • Applications aux calculs d'aires • Intégration par parties	Les élèves savent : • donner et utiliser des méthodes pour d'approximations de calculs d'aires (ex : méthodes des rectangles) • la signification et les propriétés de l'intégrale • expliquer la notion de primitive et donner une primitive d'une fonction donnée • justifier qu'une fonction admet plusieurs primitives, égales à une constante additive près • calculer une intégrale sur un intervalle borné à l'aide de la formule : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, où $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ • transformer une surface limitée par une courbe en une surface rectangulaire grâce au théorème de la moyenne • utiliser le calcul intégral pour résoudre des problèmes d'application concrète • calculer l'aire sous une courbe à l'aide du calcul intégral • intégrer par parties

2. 5 GEOMETRIE VECTORIELLE - FONDEMENTS	
Transformations du plan • Translations • Symétries • Rotations • Homothéties	Les élèves savent : • construire l'image d'une figure par ces transformations du plan. • donner l'effet sur l'alignement, les angles orientés, les longueurs, les aires e • utiliser les propriétés de conservation dans des démonstrations simples.
Vecteurs de l'espace et calcul vectoriel	Les élèves savent : • tracer un représentant de vecteur dans un repère cartésien. • transposer la notion de vecteur du plan et de calcul vectoriel aux vecteurs de l'espace
Colinéarité, coplanarité • Dépendance, indépendance linéaire de vecteurs dans l'espace	Les élèves savent : • déterminer si deux vecteurs sont colinéaires ou si trois vecteurs sont coplanaires • interpréter ces résultats géométriquement et les démontrer algébriquement

Contenus **Verbindlicher Inhalt**	**Compétences attendues** **Verbindliche Kompetenzen**
Produit scalaire dans le plan et dans l'espace • Définition • Propriétés • Angles orientés de vecteurs • Règles de calcul • Norme d'un vecteur • Orthogonalité de deux vecteurs • Utilisation du produit scalaire dans le plan et dans l'espace - Calculs de mesures d'angles - Calculs de longueurs - Formules d'addition en trigonométrie	Les élèves savent : • utiliser les différentes l'expression analytique et l'expression à l'aide de l'angle entre les deux vecteurs du produit scalaire • passer de l'une à l'autre • utiliser les règles de calcul pour le produit scalaire • faire le lien entre produit scalaire avec la norme d'un vecteur. • utiliser la définition de vecteurs orthogonaux et justifier l'orthogonalité de deux vecteurs à l'aide du produit scalaire. • déterminer l'angle entre deux droites ou deux plans à l´aide du produit scalaire. • utiliser le produit scalaire pour démontrer des théorèmes de géométrie (théorème de la médiane, loi des sinus, formule d'Al-Kashi, théorème du triangle inscrit dans un demi-cercle). • utiliser les formules d'addition et de duplication en trigonométrie et les relations métriques dans le triangle à l'aide du produit scalaire.
Produit vectoriel • Définition • Propriétés • Propriétés algébriques – règles de clacul • Application du produit vectoriel : - Démonstration de la colinéarité de vecteurs - Aire du parallélogrammme et du triangle - Vecteur normal à un plan	Les élèves savent • la définition et connaissent les propriétés du produit vectoriel ainsi que les règles de calcul fondamentales • prouver à l'aide du produit vectoriel si deux vecteurs sont colinéaires ou non. • calculer l'aire d'un parallélogramme et d'un triangle dans l'espace ainsi que les coordonnées d'un vecteur normal à un plan
Indication : Le calcul vectoriel ne se fera que de manière analytique	
2. 6 GEOMETRIE VECTORIELLE – OBJETS DE L'ESPACE	
Droites dans l'espace • Représentation d'une droite de l'espace : - À partir de deux points - Représentation paramétrique à l'aide d'un point et d'un vecteur	Les élèves savent : • établir une représentation paramétrique de droite et justifier qu'une telle représentation n'est pas unique.
Plans dans l'espace • Représentation d'un plan de l'espace : - À partir de trois points - Représentation paramétrique à partir d'un point et de deux vecteurs non colinéaires • Equation cartésienne - À partir d'un point et d'un vecteur normal - À partir d'une représentation paramétrique	Les élèves savent : • établir une équation de plan et s'en servir dans différents contextes. • déterminer une équation cartésienne d'un plan à partir d'une représentation paramétrique et inversement.
Positions relatives et angles entre deux objets de l'espace • position relative de deux droites • position relative d'une droite et d'un plan • position relative de plans • Angle entre deux droites sécantes, entre une droite et un plan, entre deux plans	Les élèves savent : • déterminer la position relative entre droites et plans de l'espace • le cas échéant déterminer leur intersection • déterminer l'angle entre ces deux objets de l'espace
Distances • entre un point et un plan • entre un point et une droite	Les élèves savent : • calculer ces différentes distances.

Contenus **Verbindlicher Inhalt**	**Compétences attendues** **Verbindliche Kompetenzen**
• entre deux droites parallèles • une droite et un plan qui lui est parallèle • entre deux plans parallèles	
Le cercle • Equation cartésienne d'un cercle • Caractérisation vectorielle d'un cercle	Les élèves savent : • passer d'une forme à l'autre.
Les sphères • Équation cartésienne de la sphère • Caractérisation vectorielle de la sphère • Positions relatives - Sphère – droite - Sphère – plan - Sphère – sphère • Intersection de deux sphères	Les élèves savent : • passer de l'équation cartésienne à la caractérisation vectorielle et vice-versa. • étudier les positions relatives de ces objets de l'espace • déterminer le cercle d'intersection de deux sphères
Indications : • L'étude de positions relatives dans l'espace offre la possibilité d'établir et de résoudre des systèmes d'équations linéaires. • En application des calculs de distances, on pourra étudier le symétrique d'un point par rapport à un plan ou à une droite. • La représentation paramétrique du cercle n'est pas attendue • Les familles de sphères pourront être traitées en complément.	

2. 7 NOMBRES COMPLEXES	
Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes • Différentes écritures d'un nombre complexe - Forme algébrique $z = a + bi$ - Forme trigonométrique $z = r \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta)$ - Forme exponentielle $z = r \cdot e^{i \cdot \theta}$ *avec* $r = \lvert z \rvert$, $\theta = Arg(z)$ • Nombre complexe en tant que représentant d'un point ou d'un vecteur dans le plan complexe • Conjugué d'un nombre complexe : $\bar{z} = a - bi$	Les élèves savent : • utiliser les différentes écritures d'un nombre complexe, • passer de l'une à l'autre suivant les besoins du contexte • utiliser les notions de partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module et argument • les interpréter géométriquement.
Opérations algébriques sur les nombres complexes • Somme • Différence • Produit • Quotient • Module et argument d'un produit, d'un quotient.	Les élèves savent • utiliser les opérations algébriques sur les nombres complexes pour effectuer des calculs dans chacune des écritures. • interpréter géométriquement l'argument et le module de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ • établir à l'aide de ces outils des propriétés géométriques de figures données.

Contenus Verbindlicher Inhalt	Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen
Équations dans ℂ • Résolution des équations du second degré à coefficients dans ℂ • Racines d'un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 3 • Formule de Moivre : $z = r.e^{i\alpha} \Longrightarrow z^n = r^n.e^{in\alpha}$ • Racines de l'unité $z^n = 1$ • Équation $z^n = q$	Les élèves savent : • calculer les racines carrées d'un nombre complexe et résoudre les équations du second degré à coefficients complexes. • déterminer les racines d'un polynôme de degré ≤ 3 à coefficients complexes (connaissant une racine) et décomposer ce polynôme en facteurs premiers. • calculer les racines *n*-ièmes d'un nombre complexe et savent les interpréter géométriquement.
Similitudes directes	Les élèves savent : • reconnaître et caractériser les transformations suivantes (angle, rapport et point fixe, s'ils existent) : - l'identité ($a = 1$ et $b = 0$) - les translations $z \mapsto z + b$ - les homothéties $z \mapsto a.z + b$ avec $a \neq 1$ et $a\epsilon\ \mathbb{R}^*$ - les rotations avec $\vert a\vert = 1$ et $a \neq 1$ - les similitudes directes avec $a \neq 1$et $a \notin \mathbb{R}$ • savent caractériser une similitude directe comme composée commutative d'une rotation et d'une homothétie de même centre. Cette décomposition est unique.
Indications : • Les opérations doivent être effectuées à la main. On veillera dans ce contexte à appliquer des méthodes et non pas à apprendre des formules par cœur. (par exemple pour la division) • On veillera à ce que les exemples soient simples lorsqu'on cherche à déterminer les racines de polynômes complexes de degré > 2. On veillera aussi à interpréter les solutions géométriquement.	

2. 8 PROBABILITES ET STATISTIQUES	
Statistique descriptive et analyse de données • Caractéristiques de dispersion : - variance, - écart-type. • Diagramme en boîte	Les élèves : • connaissent la définition et la signification des deux paramètres de dispersi variance et écart-type • savent utiliser les deux couples usuels « moyenne- écart-type » et « médiane - écart interquartile » pour décrire de façon appropriée une série statistique • savent étudier une série statistique ou mener une comparaison pertinente de deux séries statistiques à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice.
Notions fondamentales de probabilités • Définitions importantes et notions fondamentales : - Expérience aléatoire - Issues d'une expérience aléatoire - Fréquence d'une issue - Loi des grands nombres (approche empirique) - Evènement élémentaire	Les élèves : • utilisent les définitions fondamentales et les définitions avec aisance • savent reconnaître une situation d'équiprobabilité ou une épreuve de Bernoulli

Contenus Verbindlicher Inhalt	Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen
- Evénements • Expériences aléatoires simples - Situations d'équiprobabilité - Epreuve de Bernoulli	
Expériences aléatoires successives • Règles de calculs - Principe multiplicatif - Somme de probabilités • Arbre de probabilité (complet ou tronqué) • Représentations d'expériences par un tableau à double entrée	Les élèves • savent exprimer les issues sous forme de *n*-uplets lors d'une succession de n épreuves aléatoires • appliquent les règles de calcul (en utilisant ou non un arbre de probabilité ou un tableau) d'expériences aléatoires successives
Dénombrements • Règles de calcul, factorielle, arrangements, combinaisons • Modèle des urnes en tenant compte ou non de l'ordre - tirages aléatoires successifs avec remise - tirages aléatoires successifs sans remise - permutations de *k* objets, - tirages simultanés de *k* objets pris parmi *n*.	Les élèves • maîtrisent les règles du calcul combinatoire.
Variable aléatoire discrète et loi de probabilité. • Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète • Espérance d'une variable aléatoire • Variance et écart-type d'une variable aléatoire	Les élèves • déterminent et exploitent la loi de probabilité d'une variable aléatoire. • savent présenter la loi de probabilité d'une variable aléatoire sous forme d'un tableau, ou d'un graphique. • interprètent l'espérance comme valeur moyenne dans le cas d'un grand nombre de répétitions • déterminent l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire en utilisant la calculatrice ou un logiciel • utilisent sans les démontrer les formules suivantes : $E(aX+b)=aE(X)+b$ et $V(aX+b)=a^2V(X)$
Loi binomiale • Schéma de Bernoulli, loi binomiale • Fonction de répartition • Espérance et variance d'une loi binomiale	Les élèves savent : • grâce à un arbre des probabilités, donner la valeur des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ en tant que nombre de chemins de l'arbre réalisant *k* succès pour *n* répétitions ; • calculer des probabilités à l'aide de la loi binomiale en utilisant la calculatrice graphique ou en s'aidant d'un tableau de valeurs • calculer et interpréter espérance et variance d'une loi binomiale.
Conditionnement et indépendance • Probabilités conditionnelles • Indépendance de deux événements • Formule des probabilités totales	Les élèves • connaissent la notion de probabilité conditionnelle et savent utiliser avec aisance la notation $P_A(B)$ • représentent une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau à double entrée • calculent la probabilité d'un événement avec la formule des probabilités

Contenus Verbindlicher Inhalt	Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen
	totales sous la forme : $$P(A) = P(B) \times P_B(A) + P(\bar{B}) \times P_{\bar{B}}(A)$$
Variables aléatoires continues et notion de loi à densité • Notion de variables aléatoires continues • Notion de lois à densité • Loi uniforme sur $[a; b]$ • Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme. • Relation entre fonction de densité sur un intervalle et fonction de répartition pour une loi continue	Les élèves • savent, sur des exemples, distinguer une variable aléatoire discrète d'une variable aléatoire continue. • connaissent et savent utiliser la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a; b]$ pour calculer une probabilité. • connaissent la définition d'une fonction de densité et savent vérifier, sur des exemples choisis, si une fonction est une fonction de densité.
Loi exponentielle	Les élèves • savent calculer une probabilité dans le cadre de la loi exponentielle. • déterminent l'espérance d'une variable suivant une loi exponentielle grâce à la formule $\lim_{x\to\infty} \int_0^x t \times f(t)dt$ où f représente la fonction de densité de la loi exponentielle. • savent que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est égale à $\frac{1}{\lambda}$
Lois normales et courbe de Gauss • Loi normale $N\ (\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ. • Loi normale centrée réduite $N\ (0,1)$ • Théorème de Moivre - Laplace	Les élèves • connaissent les notions de loi normale et de loi normale centrée réduite • savent que pour un échantillon assez grand, l'histogramme associé s'approche d'une courbe continue (notamment d'une courbe de Gauss dans le cas des variables aléatoires suivant une loi binomiale) • connaissent la fonction de densité ($f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$) de la loi normale $N(0,1)$ et savent la représenter graphiquement. • connaissent l'expression de la fonction, la représentation graphique et les propriétés de la fonction de répartition associée • savent qu'une variable aléatoire X suit une loi $N(\mu, \sigma^2)$ si la variable aléatoire $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $N(0,1)$. • utilisent une calculatrice, un tableur ou la table de la loi $N(0,1)$ pour calculer une probabilité dans le cadre d'une loi normale $N\ (\mu, \sigma^2)$. • connaissent les valeurs approchées $u_{0,05} \approx 1{,}96$ et $u_{0,01} \approx 2{,}58$. • Savent calculer des probabilités grâce au théorème de Moivre-Laplace
Échantillonnage • Simulation d'échantillons de taille n • Détermination de l'intervalle de fluctuation d'une fréquence au seuil de 95%. • Prise de décision à partir d'une fréquence	Les élèves • conçoivent, mettent en oeuvre et exploitent des simulations de situations concrètes à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice. • dans le cadre d'une expérience aléatoire, déterminent, à l'aide de la calculatrice ou d'un tableau, l'intervalle de fluctuation à un seuil donné et déterminent à l'aide de la loi binomiale, de rejeter ou non une hypothèse sur une proportion (par exemple si une fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation ou non) • sont sensibilisés, dans le cadre de l'étude d'échantillons de grande taille, à la notion de « différence significative » par rapport à une valeur attendue • utilisent, en pratique, pour des échantillons de taille assez grande ($n > 25$) et pour une proportion p comprise entre 0,2 et 0,8 le

Contenus Verbindlicher Inhalt	Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen
	résultat suivant : « si f désigne la fréquence du caractère dans l'échantillon, f appartient à l'intervalle $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95. »
Intervalle de fluctuation asymptotique **(p connu)**	Les élèves • connaissent l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % : $\left[p-1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;p+1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$où p désigne la proportion dans la population. • connaissent les conditions d'approximation : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.
Estimation • Intervalle de confiance (p inconnu) • Taille de l'échantillon • Niveau de confiance.	Les élèves • savent déterminer l'appartenance d'une proportion inconnue à un intervalle au seuil 0,95. • déterminent une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95.
Tests d'hypothèse • Hypothèse nulle • Hypothèse alternative • Règles de décisions • Risques d'erreur de première et de seconde espèce • Probabilité d'erreur	Les élèves • utilisent la loi binomiale pour effectuer des tests d'hypothèses • formulent à l'aide de tests, l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1. Ils donnent les régions de rejet, énoncent les règles de prise de décision et déterminent les risques de première et deuxième espèce.

Indications :

- Il n'est pas prévu d'aborder la notion de probabilité de façon trop formelle.
- En ce qui concerne le dénombrement, on veillera à se limiter à des situations qui impliquent des calculs combinatoires simples.
- Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en oeuvre de cette formule doit être maîtrisée.
- On renoncera à l'étude des fonctions de densité sur des intervalles non bornés.
- Dans le cas de la loi normale centrée réduite, on pourra démontrer que l'espérance est égale à 0. Par contre, on ne démontrera pas de façon formelle que la variance définie par $E((X-E(X))^2)$ est égale à 1.
- On n'attendra pas des élèves qu'ils connaissent l'expression de la fonction de densité de la loi normale $N(\mu,\sigma^2)$.
- Dans le cadre des exercices sur les tests d'hypothèse, on se limitera à l'utilisation de la loi binomiale. On indiquera cependant qu'il existe des tests d'hypothèse pour d'autres lois de probabilité.

2. 9 ARITHMETIQUE

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ • Multiples et diviseurs • Propriétés de la relation de divisibilité • Ensemble des diviseurs, ensemble des multiples	Les élèves • connaissent et utilisent la définition de multiples et diviseurs • connaissent et utilisent les propriétés de la relation de divisibilité
Division euclidienne • Théorème de la division euclidienne	Les élèves • connaissent et utilisent le théorème de la division euclidienne
Congruences	Les élèves • connaissent et utilisent les propriétés des congruences

Contenus Verbindlicher Inhalt	Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen
PGCD • Diviseur commun de deux nombres • Algorithme d'Euclide • Propriétés du pgcd	Les élèves • déterminent le PGCD de deux entiers à l'aide de l'algorithme d'Euclide
Nombres premiers entre eux • Définition et propriétés • Identité et théorème de Bézout • Théorème de Gauss	Les élèves • connaissent et utilisent le théorème de Bézout • connaissent et utilisent le théorème de Gauss • savent résoudre une équation diophantienne de la forme $\boldsymbol{ax+by=c}$
PPCM • Définition et propriétés • Relation entre pgcd et ppcm de deux nombres	Les élèves • savent utiliser la relation ab = ppcm(a;b)×pgcd(a;b) pour déterminer le ppcm de deux nombres.
Nombres premiers	
Diviseur premier d'un entier naturel • Notion de nombre premier • Critère de primalité • Propriétés • Infinitude de l'ensemble des nombres premiers	Les élèves • savent tester si un entier *n* est premier en recherchant d'éventuels diviseurs premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{n}$. • connaissent et utilisent le résultat, corollaire du th. de Gauss : "Si un nombre premier divise un produit de facteurs, alors il divise l'un de ces facteurs".
Décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers • Théorème fondamental de l'arithmétique • Application à la recherche de multiples et de diviseurs d'un nombre entier • Détermination du pgcd et du ppcm de deux entiers	Les élèves • décomposent un nombre en produit de facteurs premiers et utilisent cette décomposition pour déterminer le pgcd et le ppcm de deux nombres entiers.
Indication : • C'est en cryptographie que l'on trouve des applications concrètes et variées de la mathématique pure. Par exemple Code Barre, Code ISBN, Code IBAN, Code INSEE, problèmes de codages et de cryptages (cryptage affine, Chiffre de Vigenère, Chiffre de Hill) Une initiation au système RSA est envisageable. • On pourra étudier des nombres premiers particuliers (Fermat, Mersenne)	

2. 10 MATRICES	
Définitions et généralités • Matrice, matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée • Ordre d'une matrice	Les élèves • savent construire une matrice à partir d'un problème et représenter le problème par un graphe
Opérations sur les matrices • Addition de matrices • Produit d'une matrice par un réel • Multiplication de deux matrices compatibles • Inverse d'une matrice carrée	Les élèves • interprètent la multiplication de matrices comme une succession de processus (composition). • déterminent l'inverse d'une matrice inversible carrée d'ordre 2. • utilisent leur calculatrice pour inverser une matrice inversible d'ordre 3. • Selon le contexte, ils interprètent la matrice inverse comme étant celle qui modélise le processus retour. • déterminent la puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 (en utilisant un raisonnement par récurrence).

Contenus Verbindlicher Inhalt	Compétences attendues Verbindliche Kompetenzen
Matrices de transition	Les élèves • savent transcrire un graphe sous forme de matrice et réciproquement.
Résolution de systèmes linéaires	Les élèves • savent transcrire un système linéaire en écriture matricielle puis le résoudre.
Suite de matrices • Suite de matrices colonnes (U_n) vérifiant une relation de récurrence du type $U_{n+1} = AU_n + C$ • recherche d'une suite constante vérifiant la relation de récurrence • étude de la convergence.	Les élèves • savent résoudre des exercices guidés faisant intervenir des suites de matrices
2. 11 Algorithmique	
Algorithmique • Langage symbolique • Tableur • Elaboration de programmes adaptés	Les élèves savent : • décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique. • en réaliser quelques-uns en classe, à l'aide d'un tableur ou d'un programme sur calculatrice ou avec un logiciel adapté • interpréter des algorithmes plus complexes. • établir un programme pour calculer les images de nombres par une fonction • programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif avec une fin de boucle conditionnelle.
Indications : • Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé. • L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (analyse, géométrie, statistiques et probabilités, arithmétique), mais aussi avec les autres disciplines ou le traitement de problèmes concrets. • À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.	

3 Opérateurs

Opérateur	Définition
Indiquer, nommer, citer	Donner des résultats sous forme de nombre ou de phrase, sans explications et sans indication de la méthode utilisée
Justifier	Confirmer ou infirmer une affirmation à l'aide d'un calcul, d'un raisonnement, d'une argumentation
Calculer, déterminer	À partir d'une équation ou d'une formule, obtenir des résultats en utilisant les règles de calculs
Décrire	Restituer une démarche, une situation, en utilisant les notions mathématiques appropriées
Démontrer, montrer	Valider une affirmation en utilisant des théorèmes connus, des raisonnements logiques, des équivalences, ou des critères mathématiques
Représenter	Traduire des objets mathématiques de manière rigoureuse ; reproduire graphiquement avec précision, en grandeur réelle ou à une échelle donnée, une courbe ou un objet géométrique dont on connaît un certain nombre de points
Expliquer, interpréter	Traduire des situations, des phénomènes, des structures ou des résultats en proposant ou en adaptant un modèle mathématique pour résoudre le problème posé
Extraire	Utiliser des représentations données pour répondre à des questions ou poursuivre un raisonnement
Expliquer, commenter	En utilisant des prérequis, présenter et illustrer des situations de manière à les rendre compréhensibles
Utiliser	Étendre des notions théoriques, des règles, théorèmes, méthodes, à d'autres situations
Esquisser	Représenter graphiquement, de manière simple, les propriétés fondamentales d'un objet mathématique
Vérifier	Confirmer ou infirmer un état donné d'un problème ouvert, en utilisant des règles ou des propriétés mathématiques
Étudier	Mener une démarche logique en appliquant des critères précis à des situations, des problèmes, des interrogations
Comparer	Relever des ressemblances ou des différences
Attribuer	Créer une relation justifiée entre des objets ou des représentations